4. Klassifikation der asymptotischen Funktionen $f_A(x)$

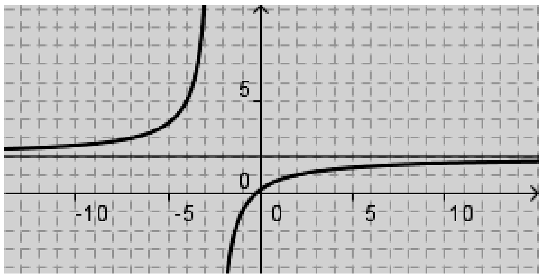
Die Art der asymptotischen Funktion f_A hängt vom Grad(Z) des Zählers und vom Grad(N) des Nenners ab.
Der Grad der asymptotischen Funktion f_A ist **Grad(f_A) = Grad(Z) – Grad(N).**

Es lassen sich daher folgende Fälle unterscheiden:

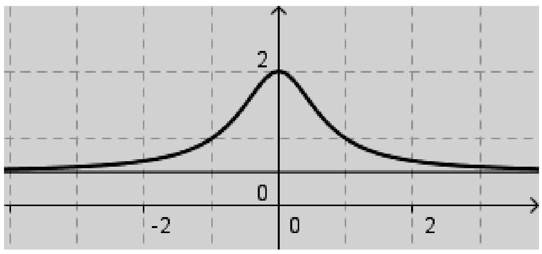
- **Grad(Z) < Grad(N)** d.h. Grad(f_A) < 0
  In diesem Fall ist die **x-Achse die waagrechte Asymptote** des Graphen.
  Der Nenner wächst schneller als der Zähler für betragsgroße x.
- **Grad(Z) = Grad(N)** d.h. Grad(f_A) = 0
  Die Graphen besitzen die **waagrechte Asymptote** $y = \frac{a}{b}$,
  wobei a und b die Leitkoeffizienten des Zählers bzw. des Nenners sind.
- **Grad(Z) + 1 = Grad(N)** d.h. Grad(f_A) = 1
  Die Graphen besitzen eine sog. „schiefe“ oder **„schräge“ Asymptote**.
  Ihren Term erhält man durch zwei Schritte einer Polynomdivision.
- **Grad(Z) + 1 > Grad(N)** d.h. Grad(f_A) > 1
  Die Graphen besitzen eine sog. **asymptotische Funktion** vom Grad (z–n).

Dazu einige Beispiele:

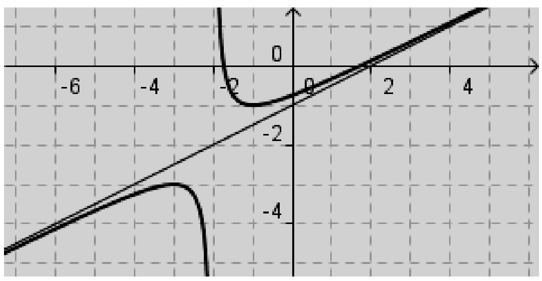
- $f_1(x) = \frac{4x+1}{2x+5} = 2 - \frac{9}{2x+5}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}5\}$;
  Der Graph hat eine waagrechte Asymptote y = 2.
  Von ihr „subtrahiert“ wird eine Restfunktion
  mit einfachen Pol bei –2,5.



- $f_2(x) = \frac{2x^2+4}{4x^2+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4x^2+2}$; $D = \mathbb{R}$;
  Der Graph hat eine waagrechte Asymptote y = ½ .
  Zu ihr „addiert“ wird eine Restfunktion ohne Pol
  mit höchsten Wert dort, wo der Nenner $4x^2 + 2$
  am kleinsten ist.

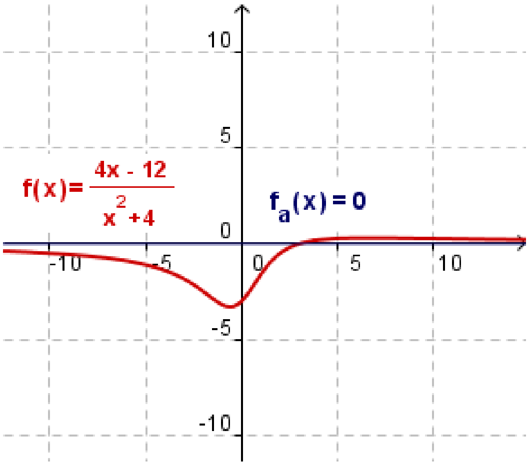


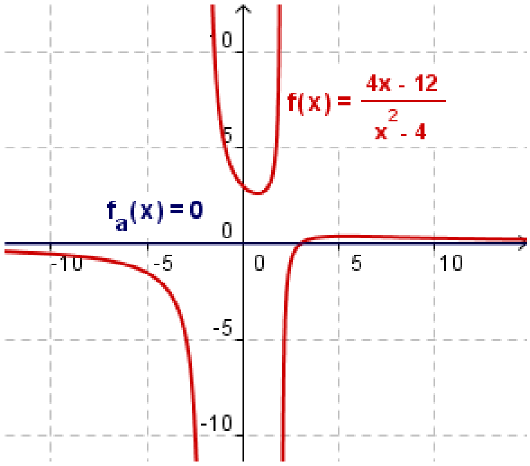
- $f_3(x) = \frac{x^2-3}{2x+4} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x+4}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
  Der Graph hat eine schräge Asymptote y = ½x –1.
  Zu ihr „addiert“ wird eine Restfunktion
  mit einfachen Pol bei –2.

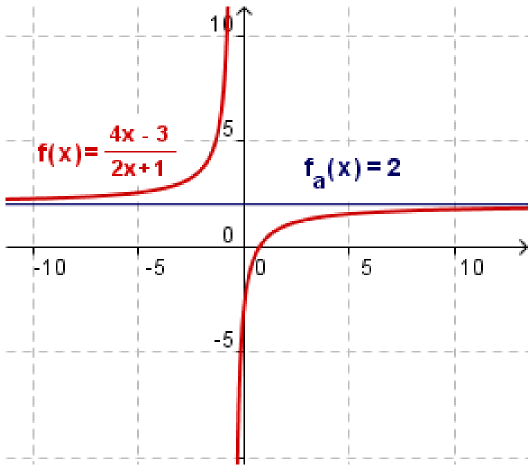


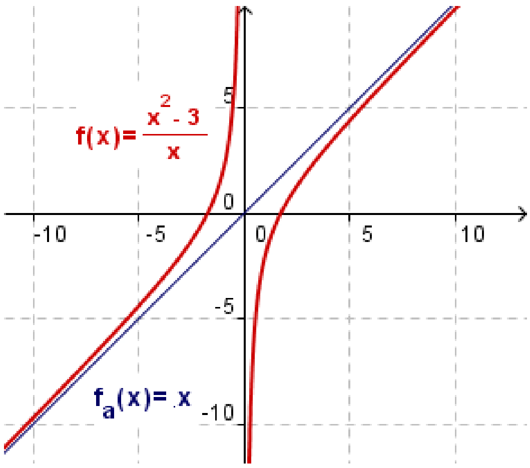
Weitere Beispiele

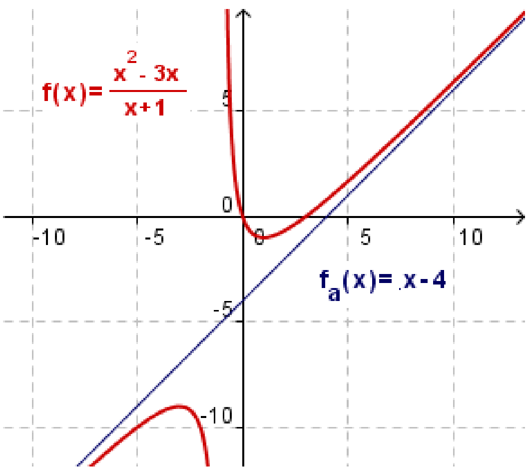
(Führen Sie die Polynomdivision, falls nötig, selbst durch):

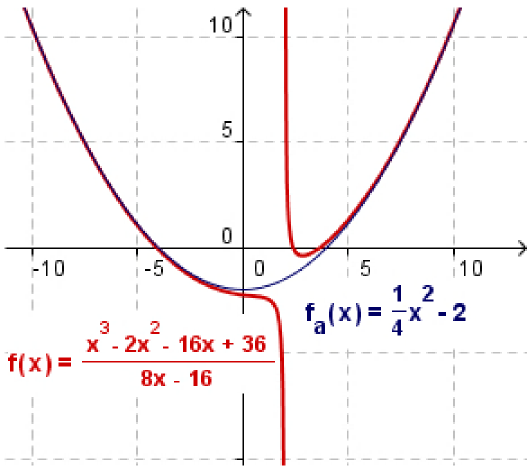












Bestimmen Sie die Asymptoten-Funktion f_A und skizzieren Sie die Graphen:

$f_4(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ $\quad$ $f_5(x) = \frac{x^2 - 3}{x}$ $\quad$ $f_6(x) = \frac{4x - 3}{6x+1}$ $\quad$ $f_7(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 1}$

$f_8(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$ $\quad$ $f_9(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1}$ $\quad$ $f_{10}(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 1}$ $\quad$ $f_{11}(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{x + 2}$